

Gráfelmélet

„gráf” – matematikai modell bizonyos feladatok megoldására

Pl. 1. úthálózat, melyik a legrövidebb út két pont között

2. Königsbergi hidak problémája

3. Adottak munkafázisok és ezek közötti függőségek (Y nem kezdődhet meg, amíg X be nem fejeződött).

4. Előfordulhat-e, hogy egy 5 fős társaságban mindenkinek 3 barátja legyen?

Nemirányított / irányítatlan gráfok (graf neorientat / undirected graph)

<https://www.pbinfo.ro/articole/810/grafuri-neorientate>

Ért. A $G = (X, U)$ halmazpárt nemirányított gráfnak nevezzük, ahol:

X – a csúcsok / csomópontok halmaza (csúcs – vârf, vertex;
csomópont – nod, node)

U – az élék halmaza, melynek elemei az X kételemű részhalmazai
(él – muchie, edge)

Általában a csomópontokat 1-től n -ig terjedő egész számokkal
címkézzük, ahol $n = |X|$, az éleket pedig $[x, y]$, $\{x, y\}$ jelöléssel írjuk le, ahol
 x és y csomópontok.

Egyszerű gráf: két csomópont között legfeljebb egy él lehet és nincsenek
hurokélek – bucle (azaz egy csomópontból önmagába menő élék).

Ért.

- A.m.h. (“azt mondjuk, hogy”) az x és y csúcsok **szomszédosak**, ha létezik az $\{x,y\}$ él (ami ugyanaz, mint az $\{y,x\}$ él) (adjacent, adjacent).
- A.m.h egy csomópont **illeszkedik** egy élre, ha eleme annak, mint halmaznak. Továbbá ekkor ez annak az élnek egy **végpontja**. (incidentă)
- A.m.h. két él illeszkedik egymásra, ha van közös végpontjuk.

Példa:

$$G = (X,U), \quad X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$U = \{ [1,2], [2,3], [1,3], [3,4], [5,6] \}$$

(rajz)

Ért. Egy csomópont **fokszáma** a vele szomszédos pontok számát jelenti (graf, degree). Jel. $d(x)$

Megj.

- Egy csomópont fokszáma 0-tól $|X|-1$ -ig változhat.
- Egy 0 fokszámú csomópontra a.m.h. **izolált**
- Egy 1 fokszámú csomópontra a.m.h. **terminális**

Tétel: Egy irányítatlan gráfban a fokszámok összege az élek számának kétszerese.

Következmények: (1) a fokszámok összege páros; (2) a páratlan fokszámú csomópontok száma páros.

Nemirányított gráfok ábrázolása (memóriában)

1. Éllistával (ld. az előbbi példát): kell a csomópontok száma + az élek listája (listă de muchii)

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$$

$$U = \{ [1,2], [2,3], [1,3], [3,4], [5,6] \}$$

2. Szomszédsági mátrix-szal (matrice de adiacență)

Ha n csomópont van a gráfban, akkor a szomsz. mátrix $n \times n$ -es és az i . sor j . oszlopában levő elem megmondja, hogy i és j csomópontok szomszédosak-e (1-ha igen, 0 ha nem)

$$0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

Ez a mátrix szimmetrikus a főátlóra nézve.

3. Szomszédsági listákkal (liste de adiacență)

Minden csomópont esetén eltároljuk, hogy kik az ő szomszédai (felsorolva őket).

1: 2, 3

2: 3, 1

3: 1, 2, 4

4: 3

5: 6

6: 5

7:

Kérdés: Hány n -pontú nemirányított gráf létezik (a pontjai $\{1,2, \dots, n\}$)?
(rajz)

Gyakorlatok:

1. Rajzoljuk le azt a gráfot, melynek szomszédsági mátrixa:

$$0 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 1$$

$$1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0$$

$$0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0$$

1 0 0 0 0 1
1 1 0 0 0 1
1 0 0 1 1 0

1: 2, 4, 5, 6

2: 1, 5

3:

4: 1, 6

5: 1, 2, 6

6: 1, 4, 5

2. Írjuk le a szomszédsági mátrixát annak a 8 pontú gráfnak, melynek élei:

[1,2], [2,4], [4,3], [4,5], [1,5], [7,8], [6,2], [3,5]

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.
1.	0	1	0	0	1	0	0	0
2.	1	0	0	1	0	1	0	0
3.	0	0	0	1	1	0	0	0
4.	0	1	1	0	1	0	0	0
5.	1	0	1	1	0	0	0	0
6.	0	1	0	0	0	0	0	0
7.	0	0	0	0	0	0	0	1
8.	0	0	0	0	0	0	1	0

Rész- és algráfok

- Egy $G = (X, U)$ gráf részgráfiának (graf partíal) nevezünk egy olyan $G' = (X', U')$ gráfot, mely esetén U' részhalmaza U -nak.
- Egy $G = (X, U)$ gráf algráfiának (subgraf) nevezünk egy olyan $G' = (X', U')$ gráfot, mely esetén X' részhalmaza X -nek és U' -ben megvan az összes olyan él, ami G -ben az X' -ben levő pontokra illeszkedett (vagyis csak azok az élek hiányoznak, amik a törölt pontokra illeszkedtek).

- Egy $G = (X, U)$ gráf komplementere az a gráf, amiben a csomópontok ugyanazok és pont azok az élek vannak meg benne, amik az eredetiben nem voltak.

HF. Egy n ponttal és m éllel rendelkező gráfnak hány részgráfja és hány algráfja van (az előbbi definíciók szerint)?

2^m részgráfja van

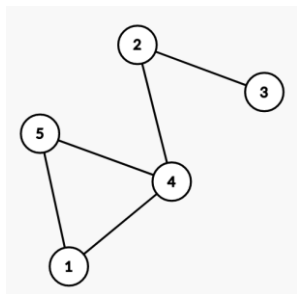
$2^n - 1$ algráf (mert az üres nem jó)

További megnevezések:

- „Teljes gráf” (graf complet) – minden lehetséges él megvan benne.
Jel. K_n – az n pontú teljes gráf (éleinek száma: $\text{comb}(n, 2)$)
- „Üres gráf” (graful null) – nincsenek élei
- „reguláris/szabályos gráf” – minden pontnak ugyanannyi a fokszáma
- „páros gráf” – olyan gráf, melyben a csomópontok két halmazba oszthatók (particionálhatók) úgy hogy a gráf minden éle az egyik csoporttól a másik csoport valamelyik csomópontja felé megy
- „teljes páros gráf” – olyan páros gráf, amiben minden lehetséges él be van húzva

Séta, vonal, út, összefüggőség

- „séta” – csomópontok sorozata, ahol két egymás melletti csomópont szomszédos a gráfban (RO: [lanț](#))



Pl.

Lehetséges séták:

1 5 (vonal is, út is)

1 (vonal is, út is)

1 5 4 1 5 4 2 3 (nem vonal, nem út)

1 5 4 2 3 (vonal is, út is)

4 1 5 4 2 (vonal is, nem út)

- „vonal” – olyan séta, amiben nem ismétlődnek élek (RO: [lanț simplu](#))
- „út” – olyan séta, amiben nem ismétlődnek csomópontok (RO: [lanț elementar](#))
- „zárt vonal” – olyan vonal, amiben az első és utolsó csomópont megegyezik (RO: [ciclu](#))
- „zárt út” (kör) – olyan út, amiben az első és utolsó csomópont megegyezik (ilyen ezt nem vesszük ismétlődésnek) (RO: [ciclu elementar](#))
- “körmentes gráf” – gráf, amiben nincsenek körök (RO: [aciclic](#))

Euleri és hamiltoni gráf

- Egy vonalat „Euler-vonal”-nak nevezünk, ha a gráf minden élét pontosan egyszer tartalmazza.
- Egy gráfot „euleri”-nek nevezünk, ha van benne ZÁRT Euler-vonal.
- Egy út „Hamilton-út”, ha a gráf minden pontját pontosan egyszer tartalmazza.
- Egy gráf „hamiltoni”, ha van benne Hamilton-KÖR.

Összefüggőség

- Egy gráf összefüggő, ha bármely két pontja között van legalább egy séta (bármely pontból bármely pontba el lehet jutni).

- Összefüggő komponensnek hívunk egy olyan maximális részt a gráfból, ami összefüggő (maximális, azaz nem bővíthető több ponttal).
(példák a rajzon)
- Kétszeresen/duplán összefüggő komponens: olyan maximális része a gráfnak, amely összefüggő és ha bármely csomópontját kitöröljük (az élével együtt), még mindig összefüggő marad.

Gráfok sajátosságaira vonatkozó tételek:

- **Tétel (Euler):** Egy G gráf euléri akkor és csak akkor, ha összefüggő és minden csomópont fokszáma páros. (bizonyítás +pontért)
- **Tétel (Dirac):** Ha egy $n \geq 3$ csomópontból álló gráfban minden csomópont fokszáma $\geq n/2$, akkor a gráf hamiltoni. (bizonyítás +pontért)

Fák

- Értelmezés: fának nevezünk egy összefüggő körmentes gráfot.
- Gyökeres fának nevezünk egy olyan fát, amiben kijelöltünk egy csomópontot (a gyökeret)

Tulajdonságok:

- Egy n pontú fának $n-1$ darab éle van. (biz. Indukció n szerint.)
- Ha egy fából bármelyik élet kitöröljük, akkor az már nem lesz összefüggő.

Ért:

- Erdőnek nevezünk több fát, azaz egy körmentes gráfot (mert ennek minden összefüggő komponense fa).
- Egy gráf olyan részgráfját, ami fa, részfának nevezzük.

Gyökeres fákkal kapcsolatos fogalmak:

- „gyökér” – a kiindulópont, ennél fogva „függesztettük fel” a fát
- „Szülő” – az a pont, ami a gyökér felé vezető úton közvetlenül az aktuális után van (a gyökérnek nincs szülője).

- „Gyerek”, „közvetlen leszármazott” – közvetlenül az aktuális pont alatt levő pontok
- „Leszármazott” – az aktuális pont alatt levő pontok (gyerekek, gyerekek gyerekei stb.)
- „Ős” – gyökér felé vezető úton levő csomópont (szülő, szülő szülője stb.)
- „levél” – olyan pont, aminek nincs leszármazottja
- „testvér” – olyan pont, mellyel közös szülője van az aktuális pontnak
- „szint” – egy pont távolsága a gyökértől
- A fa „mélysége” – a legnagyobb távolság a gyökértől
- „átmérő” – a legnagyobb távolság két pont között

Gyakorlatok

- Hány élet kell törölni egy n pontú teljes gráfból ahhoz, hogy fa legyen? Válasz: $komb(n,2)-(n-1)$
- Legfeljebb hány összefüggő komponense van egy 8 pontból és 12 élből álló gráfnak és miért? (max 3 db, mindig a lehető legtöbb élt célszerű elhasználni egy-egy pont „beáldozásakor”)
- Egy gráfnak van 50 pontja és 18 éle. Milyen határok között változhat az összefüggő komponensek száma?
[32, 44] metszve N

Részfa:

- Egy fabeli pont részfája az az algráfja a fának, amiben megtartjuk csak ezt a pontot és a leszármazottait.

Gyökeres fák ábrázolása memóriában:

- Ábrázolható, mint gráf + megjegyezzük, hogy ki a gyökér.
- Leszármazott-listák (Reprezentarea prin referințe descendente):
Pl. rajz
- Apák tömbje / ősvektor (vector de tați): minden pontra lementjük, hogy ki az ő szülője (a gyökér esetén valamilyen speciális értéket használunk, pl. 0 vagy -1)

Részfa

- Egy gráf „részfájának” nevezünk egy olyan részgráfot, ami fa.

Feladatok:

var1, var2, var3II.2, Var4, var5.II.1, var5.II.3., var7.II.1, var7.II.4,
var10.II.3, var 12.II.2,

Majd az irányítottnál: var3II.1, var8.II.4, var9.II.4 , var11.II.1,

HF (keddre): var6.II.2, var8.II.1, var8.II.2, var10.II.4, var12.II.1

HF. Péntekre: var13.II.1,

Gráfok bejárása

- „bejárás” – felsoroljuk a pontokat valamilyen előre megadott szabály / sorrend szerint

Szélességi bejárás (Breadth First Search / parcurgere în lățime)

- Adott kiindulópontból kezdünk, melyet kezdetben egy várakozási sorba (sor == queue) teszünk.
- Minden lépésben „meglátogatjuk” a sor elején levő elemet: kivesszük őt a sorból és betesszük a sor végére a szomszédait.
- Az algoritmus megáll, ha elfogytak az elemek a sorból.

Megjegyzések:

- Csak azok a csomópontok lesznek meglátogatva, akik ugyanazon összefüggő komponensben vannak a kiindulóponttal.
- A pontok megjelenésének sorrendje a kiinduló ponttól mért távolságuk szerinti sorrend (távolság == hány élen kell keresztül menni, hogy a kiinduló pontból eljussunk hozzá).

Mélységi bejárás (Depth First Search, parcurgere în adâncime)

- Elindulunk a kezdőpontból, addig megyünk előre, amíg tudunk (amíg vannak még nem látogatott pontok), közben egy verembe tesszük azokat a csomópontokat, amiken átmentünk.
- Amint nem lehet tovább menni, visszatérünk (a veremben előző elemre), és innen próbáljuk meg új ágon folytatni a bejárást.
- Ha nem lehet már folytatni, ismét visszatérünk és így tovább, míg a verem ki nem ürül.

Irányított gráfok (graf orientat / directed graph / digraph)

<https://www.pbinfo.ro/articole/509/grafuri-orientate>

Ért. A $G = (X, U)$ halmazpárt irányított gráfnak nevezzük, ahol:

X – a csúcsok / csomópontok halmaza (csúcs – vârîf, vertex; csomópont – nod, node)

U – az élek / ívek (arce) halmaza, melynek elemei az X elemeiből alkotott számpárok

Általában a csomópontokat 1-től n -ig terjedő egész számokkal címkézzük, ahol $n = |X|$, az éleket pedig (x,y) jelöléssel írjuk le, ahol x és y csomópontok.

Egyszerű gráf: két csomópont között legfeljebb egy két él lehet, egy oda, egy vissza, és nincsenek hurokélek – bucle (azaz egy csomópontból önmagába menő élek).

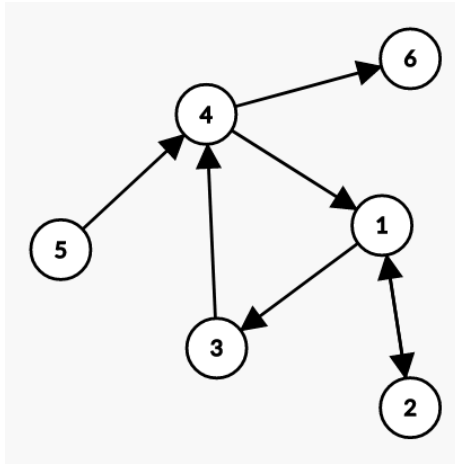
Ért.

- A.m.h. (“azt mondjuk, hogy”) az x és y csúcsok **szomszédosak**, ha létezik az (x,y) él, vagy az (y,x) él, vagy mindkettő.
- Az (x,y) élnek x a „kezdőpontja” (kiindulópontja), y a „végpontja”.

Példa:

$$G = (X,U), X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$U = \{(1,2) (2,1), (1,3), (3,4), (4, 1), (4, 6), (5,4) \}$$



Fokszámok:

Ért. Egy csomópont **bejövő fokszáma / „befoka”** azon élek számát jelenti, akik ide érkeznek (tehát ő a végpontjuk). RO: grad interior, in-degree

Ért. Egy csomópont **kimenő fokszáma / „kifoka”** azon élek számát jelenti, akik innen indulnak (tehát ő a kezdőpontjuk). RO: grad exterior, out-degree

Megj.

- Egy csomópont be- és kifoka 0-tól $|X|-1$ -ig változhat.
- Egy 0 fokszámú csomópontra a.m.h. izolált

Tétel: Egy irányítatlan gráfban a bejövő fokszámok összege egyenlő az élek számával. A kimenő fokszámok összege szintén egyenlő az élek számával.

Irányított gráfok ábrázolása (memóriában)

1. Éllistával (ld. az előbbi példát): kell a csomópontok száma + az élek listája (listă de muchii)

$$X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$U = \{ (1,2), (2,3), (3,2), (5,6) \}$$

2. Szomszédsági mátrix-szal (matrice de adiacență)

Ha n csomópont van a gráfban, akkor a szomsz. mátrix $n \times n$ -es és az i . sor j . oszlopában levő elem megmondja, hogy i -ből j -be van-e ív (irányított él) (1-ha igen, 0 ha nem).

0	1	0	0	0	0	(sorindex – kiinduló pont)
0	0	1	0	0	0	(oszlopindex – végpont)
0	1	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	1	
0	0	0	0	0	0	

Ez a mátrix **nem feltétlenül szimmetrikus** a főátlóra nézve.

3. Szomszédsági listákkal (liste de adiacență)

Minden csomópont esetén eltároljuk, hogy kikbe indul innen él (hol van a végpontja azoknak az éleknek, amiknek ő a kezdőpontja).

- 1: 2
- 2: 3
- 3: 2
- 4:
- 5: 6
- 6:
- 7:

Kérdés: Hány n -pontú irányított gráf létezik (a pontjai $\{1,2, \dots, n\}$)?
(rajz)

$$2^{\wedge V(n,2)}$$

Gyakorlatok:

3. Rajzoljuk le azt az irányított gráfot, melynek szomszédsági mátrixa:

```
0 1 0 1 0 1
1 0 0 0 0 0
0 0 0 1 0 0
1 0 0 0 0 1
1 0 0 0 0 0
1 0 0 1 1 0
```

Írjuk le a szomszédsági listákat!

1: 2, 4, 6

2: 1

3: 4

4: 1, 6

5: 1

6: 1, 4, 5

4. Írjuk le a szomszédsági mátrixát annak a 8 pontú irányított gráfnak, melynek élei:

(1,2), (2,4), (4,3), (3,4), (4,5), (1,5), (7,8), (6,7)

1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8

1. 0 1 0 0 1 0 0 0

2. 0 0 0 1 0 0 0 0

3. 0 0 0 1 0 0 0 0

4. 0 0 1 0 1 0 0 0

5. 0 0 0 0 0 0 0 0

6. 0 0 0 0 0 0 1 0

7. 0 0 0 0 0 0 0 1

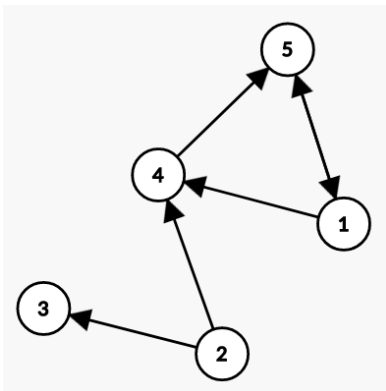
8. 0 0 0 0 0 0 0 0

Sajátos gráfok:

- Teljes gráf: bármely két pont között van benne él legalább az egyik irányban. (Más helyeken: akkor teljes ha mindkét irányban van él a pontok között.)
- Turnégráf (graf turneu): bármely két pont között van él pontosan egy irányban.

Séta, vonal, út

- Séta (drum): pontok sorozata, két-két pont között él van (fontos az irányítása is)
- Lánc (lanț): pontok sorozata, ahol két-két egymás melletti pont szomszédos, de az élek irányítását nem figyeljük
- Vonal: séta, amin nem ismétlődnek élek (drum simplu)
- Új: séta, amin nem ismétlődnek pontok (drum elementar)
- Zárt vonal – circuit
- Zárt út / kör – circuit elementar
- Egy út hossza = az őt alkotó élek számával.



Pl. séta: 2 4 5 1 4 5

Lánc, de nem séta: 5 4 1

Vonal: 2 4 5 1 4

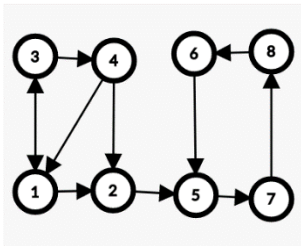
Út: 2 4 5 1

Zárt út (kör): 4 5 1 4

Összefüggőség

- Erősen összefüggő komponens (tare conex): tetszőleges A,B pontjaira van út A-ból B-be és B-ből A-ba is.
- Gyengén összefüggő komponens: ha elhagynánk az irányításokat, akkor a megfelelő nemirányított gráfban összefüggőek lennének.

Pl.



Erősen összefüggő komponensei: $\{1,3,4\}$, $\{2\}$, $\{5,6,7,8\}$.

Az egész gráf gyengén összefüggő.

Hamiltoni gráf:

- Van olyan (irányított) kör, amely pontot pontosan egyszer tartalmaz.

Euleri gráf:

- Van olyan zárt vonal (irányított), amely minden élel pontosan egyszer érint.
- Tétel: egy irányított gráf euleri, ha minden pont kimenő fokszáma egyenlő a bejövő fokszámával.

Feladatok:

var3II.1, var8.II.4, var9.II.4, var11.II.1,

Feladatok: (irányítatlan és irányított vegyesen)

var14.II.1, var15.II.1., var16.II.1, var17.II.1, var18.II.1 + általánosítás,
var20.II.1, var21.II.2, var22.II.4, var23.II.3, var24.II.1, var24.II.2,
var25.II.2, var26.II.1, var26.II.2, var27.II.1, var27.II.2, var28.II.1,2,
var29.II.1,2; var30.II.1,3; var31.II.1,2; var32.II.1